第27卷 第2期
2010年04月

工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 27 No. 2
Apr. 2010

文章编号:1005-3085(2010)02-0295-10

基于区间数度量的区间值模糊集合的相似度、模糊度和包含度的关系研究*

赵宜宾[1,2]， 曾文艺[1,†]

(1- 北京师范大学信息科学与技术学院，北京 100875； 2- 防灾科技学院基础部，北京 东燕郊 065201)

摘 要: 区间值模糊集合的相似度、模糊度和包含度及其关系研究是区间值模糊集合的一个研究热点。考虑到区间值模糊集合所表示信息的丰富性，本文使用区间数而非实数来刻画区间值模糊集合的包含度，首先给出基于区间数度量的区间值模糊集合的包含度的公理化定义，然后通过五个定理详细研究了基于公理化定义的区间值模糊集合的相似度、包含度和模糊度之间的相互转换，最后，给出了若干计算公式来计算基于区间数度量的区间值模糊集合的相似度、模糊度和包含度。这些结论，一方面丰富了区间值模糊集合的信息测度(相似度、模糊度和包含度)的内容，另一方面也为区间值模糊集合的近似推理、决策分析、模式识别等领域的应用提供了新方法和新理论。

关键词: 区间值模糊集合；相似度；模糊度；包含度；区间数

分类号: AMS(2000) 03E72; 26E25; 54C60　　**中图分类号**: C934　　**文献标识码**: A

1 引言

自美国控制论专家Zadeh[1]于1965年提出模糊集合理论以来，模糊集合便成为人们处理模糊信息的有力工具，模糊集合的理论和方法得到了空前的发展。其后，处理不确定性现象的新方法和新理论纷纷由学者们所提出。如：Atanassov[2]提出的直觉模糊集合，它是模糊集合理论的扩充和发展。作为模糊集合理论的推广，最为人们所熟知的就是区间值模糊集合。区间值模糊集合在上世纪70年代中期，分别由4位学者(Grattan-Guinness[3]，Jahn[4]，Sambuc[5]和Zadeh[6])分别独立地提出。其后，许多学者开展了区间值模糊集合的相关研究，并取得了一些有意义的成果。例如，Gorzalczany[7]研究区间值模糊集合的近似推理，Turksen[8]研究区间值模糊集合的范式，Zeng[9,10]研究了区间值模糊集合的分解定理和表现定理等等。

模糊集合的相似度、模糊度和包含度是模糊集合理论的重要研究对象。模糊集合的相似度描述的是两个模糊集合的相似程度，汪培庄教授[11]首先引入模糊集合相似度的概念，其后，模糊集合的相似度便被广泛地应用于模糊聚类、图象处理、近似推理和模糊神经网络中[12-14]。模糊集合的模糊度描述的是模糊集合的模糊程度。许多学者从不同的角度来研究它，1972年，Deluca和Termini[15]引入公理体系来描述模糊集合的模糊度，Yager[16]基于模糊集合和它相应的截集之间的距离来研究模糊集合的模糊度。模糊集合的包含度描述的是一个模糊集合被包含在另一个模糊集合的包含程度，Sinha[17]首先引入公理体系来刻画模糊集合的

收稿日期: 2008-06-10. **作者简介**: 赵宜宾(1976年12月生)，男，硕士，副教授. 研究方向：模糊推理理论及应用.
***基金项目**: 国家自然科学基金(10971234; 60775032).
†**通讯作者**: 曾文艺 E-mail: zengwy@bnu.edu.cn

包含度。基于模糊集合的相似度、模糊度和包含度三个重要的研究对象，Zeng[18] 研究了模糊集合的包含度、相似度和模糊度之间的相互转换关系。

随着区间值模糊集合的研究深入，人们开始将模糊集合的信息测度(相似度、模糊度和包含度)等概念引入到区间值模糊集合中来，并研究区间值模糊集合信息测度的相关课题。例如，Zeng[19] 引入了区间值模糊集合的模糊度的概念，并从公理体系出发，研究了区间值模糊集合相似度和模糊度之间的转换关系，Zeng[20] 研究了区间值模糊集合的距离、相似度、模糊度和包含度之间的关系。

考虑到区间值模糊集合和区间数所表示信息的丰富性，目前人们已经开始研究基于区间数度量的区间值模糊集合的相似度和包含度。例如，Bustince[21] 研究了基于区间数度量的区间值模糊集合的相似度和包含度，并应用于区间值近似推理，王贵君[22] 研究了基于区间数度量的区间值模糊集合的相似度和模糊度的积分表示，因此，我们认为有必要系统开展基于区间数度量的区间值模糊集合的信息测度 (相似度、模糊度和包含度) 的研究。正是基于这种考虑和研究背景，赵宜宾[23] 研究了基于区间数度量的区间值模糊集合的相似度与模糊度之间的相互转换关系，本文在赵宜宾[23] 的工作基础上，进一步讨论基于区间数度量的区间值模糊集合的相似度、模糊度和包含度的公理化定义，开展基于区间数度量的区间值模糊集合的信息测度(相似度、模糊度和包含度)之间的关系研究，并详细研究了它们之间的相互转换关系。

2 预备知识

我们称闭区间 $\overline{a}=[a^-,a^+]\subseteq[0,1]$ 为 [0,1] 上的区间数，其中 $0\leq a^-\leq a^+\leq 1$，$[0,1]$ 上的全体区间数记为 $[I]$。于是，根据 Zadeh[1] 的扩展原理，我们可以将 [0,1] 上的逻辑运算 $\vee$, $\wedge$, c，扩展到 $[I]$ 上。令 $\overline{a}=[a^-,a^+]$, $\overline{b}=[b^-,b^+]$，因此，我们有

$$\overline{a}\vee\overline{b}=[a^-\vee b^-,a^+\vee b^+],\quad \overline{a}\wedge\overline{b}=[a^-\wedge b^-,a^+\wedge b^+],\quad \overline{a}^c=[1-a^+,1-a^-],$$

$$\bigvee_{t\in T}\overline{a_t}=\Big[\bigvee_{t\in T}a_t^-,\bigvee_{t\in T}a_t^+\Big],\quad \bigwedge_{t\in T}\overline{a_t}=\Big[\bigwedge_{t\in T}a_t^-,\bigwedge_{t\in T}a_t^+\Big],$$

其中 T 是一个任意指标集合。进一步，我们有，$\overline{a}=\overline{b}\Longleftrightarrow a^-=b^-$，$a^+=b^+$，$\overline{a}\leqslant\overline{b}\Longleftrightarrow a^-\leqslant b^-$，$a^+\leqslant b^+$ 和 $\overline{a}<\overline{b}\Longleftrightarrow\overline{a}\leqslant\overline{b}$ 且 $\overline{a}\neq\overline{b}$，那么，在 $[I]$ 上，我们有最小元 $\overline{0}=[0,0]$ 和最大元 $\overline{1}=[1,1]$。特别地，我们记 $\overline{a}=[a,a]$，$a\in[0,1]$。

称映射

$$\overline{A}:X\to[I],\quad x\mapsto\overline{A}(x)=[A^-(x),A^+(x)]\in[I],$$

为论域 X 上的一个区间值模糊集合，论域 X 上的全体区间值模糊集合记为 IVFSs(X)。相应地，对于 $x\in X$，我们称 $\overline{A}(x)=[A^-(x),A^+(x)]$ 为元素 x 对于区间值模糊集合 $\overline{A}$ 的隶属度，相应地，$A^-(x)$ 和 $A^+(x)$ 分别被称为区间值模糊集合 $\overline{A}$ 的下和上模糊集合。简单说来，我们记 $\overline{A}=[A^-,A^+]$。

相应地，如果 $\overline{A}$, $\overline{B}\in$ IVFSs(X)，那么，下列运算可参见 Zeng[9,10]。

$\overline{A}\subseteq\overline{B}$ 当且仅当对任意的 $x\in X$，$A^-(x)\leq B^-(x)$ 和 $A^+(x)\leq B^+(x)$;

$\overline{A}=\overline{B}$ 当且仅当对任意的 $x\in X$，$A^-(x)=B^-(x)$ 和 $A^+(x)=B^+(x)$;

$(\overline{A})^c=[(A^+)^c,(A^-)^c]$。

3　基于区间数度量的区间值模糊集合的包含度

定义 1　若映射

$$I:\mathrm{IVFSs}(X)\times\mathrm{IVFSs}(X)\longrightarrow[I],\quad \overline{A}\times\overline{B}\mapsto I(\overline{A},\overline{B}),$$

满足下列性质。

(I1)　$I(X,\emptyset)=\overline{0}$；　(I2)　$I(\overline{A},\overline{B})=\overline{1}\Longleftrightarrow\overline{A}\subseteq\overline{B}$；

(I3)　对任意的 $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}\in\mathrm{IVFSs}(X)$，如果 $\overline{A}\subseteq\overline{B}\subseteq\overline{C}$，则

$$I(\overline{C},\overline{A})\le I(\overline{C},\overline{B}),\quad I(\overline{C},\overline{A})\le I(\overline{B},\overline{A}),$$

那么，称 $I(\overline{A},\overline{B})$ 是 X 上的区间值模糊集合 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 的包含度。

下面，我们给出一些计算区间值模糊集合 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 的包含度的表达式。

$$I_1(\overline{A},\overline{B})=\Big[\min\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-A^-(x_i)+B^-(x_i))\wedge 1,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-A^+(x_i)+B^+(x_i))\wedge 1\Big),$$

$$\max\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-A^-(x_i)+B^-(x_i))\wedge 1,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-A^+(x_i)+B^+(x_i))\wedge 1\Big)\Big],\quad(1)$$

$$I_2(\overline{A},\overline{B})=\Big[\min\Big(\frac{\sum_{i=1}^{n}A^-(x_i)\wedge B^-(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}A^-(x_i)},\frac{\sum_{i=1}^{n}A^+(x_i)\wedge B^+(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}A^+(x_i)}\Big),$$

$$\max\Big(\frac{\sum_{i=1}^{n}A^-(x_i)\wedge B^-(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}A^-(x_i)},\frac{\sum_{i=1}^{n}A^+(x_i)\wedge B^+(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}A^+(x_i)}\Big)\Big],\quad(2)$$

$$I_3(\overline{A},\overline{B})=\Big[\bigwedge_{i=1}^{n}(1-A^-(x_i)+B^-(x_i))\wedge(1-A^+(x_i)+B^+(x_i))\wedge 1,$$

$$\bigwedge_{i=1}^{n}(1-A^-(x_i)+B^-(x_i))\vee(1-A^+(x_i)+B^+(x_i))\wedge 1\Big],\quad(3)$$

其中 $I_3(\overline{A},\overline{B})$ 可以由 Bustince[21] 中的定理 2 来得到。

定义 2[22]　若映射 $S:\mathrm{IVFSs}(X)\times\mathrm{IVFSs}(X)\longrightarrow[I]$, $\overline{A}\times\overline{B}\mapsto S(\overline{A},\overline{B})$，满足下列性质。

(S1)　$S(X,\emptyset)=\overline{0}$；　(S2)　$S(\overline{A},\overline{B})=\overline{1}\Longleftrightarrow\overline{A}=\overline{B}$；　(S3)　$S(\overline{A},\overline{B})=S(\overline{B},\overline{A})$；

(S4)　对任意的 $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}\in\mathrm{IVFSs}(X)$，如果 $\overline{A}\subseteq\overline{B}\subseteq\overline{C}$，则

$$S(\overline{C},\overline{A})\le S(\overline{C},\overline{B}),\quad S(\overline{C},\overline{A})\le S(\overline{B},\overline{A}),$$

那么，称 $S(\overline{A},\overline{B})$ 是 X 上的区间值模糊集合 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 的相似度。

下面，我们给出一些计算区间值模糊集合 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 的相似度的表达式。

$$S_1(\overline{A},\overline{B})=\Big[\min\Big(1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|A^-(x_i)-B^-(x_i)|,1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|A^+(x_i)-B^+(x_i)|\Big),$$

$$\max\Big(1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|A^-(x_i)-B^-(x_i)|,1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|A^+(x_i)-B^+(x_i)|\Big)\Big],\quad(4)$$

$$S_2(\overline{A},\overline{B})=\Big[\min\Big(\frac{1-\bigvee_{i=1}^{n}|A^-(x_i)-B^-(x_i)|}{1+\bigvee_{i=1}^{n}|A^-(x_i)-B^-(x_i)|},\frac{1-\bigvee_{i=1}^{n}|A^+(x_i)-B^+(x_i)|}{1+\bigvee_{i=1}^{n}|A^+(x_i)-B^+(x_i)|}\Big),$$

$$\max\Big(\frac{1-\bigvee_{i=1}^{n}|A^-(x_i)-B^-(x_i)|}{1+\bigvee_{i=1}^{n}|A^-(x_i)-B^-(x_i)|},\frac{1-\bigvee_{i=1}^{n}|A^+(x_i)-B^+(x_i)|}{1+\bigvee_{i=1}^{n}|A^+(x_i)-B^+(x_i)|}\Big)\Big],\quad(5)$$

$$S_3(\overline{A},\overline{B})=\Big[\min\Big(\frac{\sum_{i=1}^{n}A^-(x_i)\wedge B^-(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}A^-(x_i)\vee B^-(x_i)},\frac{\sum_{i=1}^{n}A^+(x_i)\wedge B^+(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}A^+(x_i)\vee B^+(x_i)}\Big),$$

$$\max\Big(\frac{\sum_{i=1}^{n}A^-(x_i)\wedge B^-(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}A^-(x_i)\vee B^-(x_i)},\frac{\sum_{i=1}^{n}A^+(x_i)\wedge B^+(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}A^+(x_i)\vee B^+(x_i)}\Big)\Big].\quad(6)$$

定义3[22] 若映射 $E:\mathrm{IVFSs}(X)\longrightarrow[I]$，$\overline{A}\mapsto E(\overline{A})$，满足下列性质。

(E1) 如果 $\overline{A}$ 是普通集合，则 $E(\overline{A})=\overline{0}$;

(E2) $E(\overline{A})=\overline{1}\Longleftrightarrow A^+(x)+A^-(x)=1$，对任意的 $x\in X$;

(E3) $E(\overline{A})\le E(\overline{B})$，若 $A^-(x)\le B^-(x)$，$A^+(x)\le B^+(x)$ 且 $B^-(x)+B^+(x)\le 1$; 或 $A^-(x)\ge B^-(x)$，$A^+(x)\ge B^+(x)$ 且 $B^-(x)+B^+(x)\ge 1$;

(E4) $E(\overline{A})=E(\overline{A}^c)$。

则称 E 是 X 上的区间值模糊集合 $\overline{A}$ 的模糊度。

下面，我们给出一些计算区间值模糊集合 $\overline{A}$ 的模糊度的表达式。

$$E_1(\overline{A})=\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{A^-(x_i)\wedge(1-A^+(x_i))}{A^-(x_i)\vee(1-A^+(x_i))},\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{A^+(x_i)\wedge(1-A^-(x_i))}{A^+(x_i)\vee(1-A^-(x_i))}\Big],\quad(7)$$

$$E_2(\overline{A})=\Big[\frac{\sum_{i=1}^{n}A^-(x_i)\wedge(1-A^+(x_i))}{\sum_{i=1}^{n}A^-(x_i)\vee(1-A^+(x_i))},\frac{\sum_{i=1}^{n}A^+(x_i)\wedge(1-A^-(x_i))}{\sum_{i=1}^{n}A^+(x_i)\vee(1-A^-(x_i))}\Big].\quad(8)$$

4 区间值模糊集合的相似度、模糊度和包含度之间的关系

首先，我们来研究区间值模糊集合的相似度与包含度之间的相互刻画问题。

定理1 若 I 是区间值模糊集合的包含度，$\overline{A},\overline{B}\in\mathrm{IVFSs}(X)$，则

$$S(\overline{A},\overline{B})=I(\overline{A},\overline{B})\bullet I(\overline{B},\overline{A})\quad 和\quad S(\overline{A},\overline{B})=I(\overline{A},\overline{B})\wedge I(\overline{B},\overline{A})$$

是区间值模糊集合 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 的相似度。

证明 我们首先证明 $I(\overline{A},\overline{B})\wedge I(\overline{B},\overline{A})$ 是区间值模糊集合 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 的相似度。

(S1) $S(X,\varnothing)=I(X,\varnothing)\wedge I(\varnothing,X)=[0,0]\wedge[1,1]=[0,0]=\overline{0}$;

(S2) $S(\overline{A},\overline{B})=I(\overline{A},\overline{B})\wedge I(\overline{B},\overline{A})=\overline{1}\Longleftrightarrow I(\overline{A},\overline{B})=\overline{1},\ I(\overline{B},\overline{A})=\overline{1}\Longleftrightarrow\overline{A}\subseteq\overline{B},\ \overline{B}\subseteq\overline{A}\Longleftrightarrow\overline{A}=\overline{B}$;

(S3) $S(\overline{A},\overline{B})=I(\overline{A},\overline{B})\wedge I(\overline{B},\overline{A})=I(\overline{B},\overline{A})\wedge I(\overline{A},\overline{B})=S(\overline{B},\overline{A})$;

(S4) 对任意的 $\overline{A}\subseteq\overline{B}\subseteq\overline{C}\in\mathrm{IVFSs}(X)\Longrightarrow I(\overline{A},\overline{B})=I(\overline{B},\overline{C})=I(\overline{A},\overline{C})=[1,1]\Longrightarrow S(\overline{B},\overline{A})=I(\overline{B},\overline{A})\wedge I(\overline{A},\overline{B})=I(\overline{B},\overline{A})$。

同理，$S(\overline{C},\overline{B})=I(\overline{C},\overline{B})$，$S(\overline{C},\overline{A})=I(\overline{C},\overline{A})$，由包含度的性质 (I3) 可得

$$S(\overline{C},\overline{A})\le S(\overline{C},\overline{B}),\quad S(\overline{C},\overline{A})\le S(\overline{B},\overline{A}).$$

因为取小算子"$\wedge$"与乘积算子"$\bullet$"的运算法则相同，类似的，可以证明 $I(\overline{A},\overline{B})\bullet I(\overline{B},\overline{A})$ 是区间值模糊集合 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 的相似度。

例1　设论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$\overline{A},\overline{B}\in \mathrm{IVFSs}(X)$，令

$$\begin{aligned}I_3(\overline{A},\overline{B}) = \Big[&\bigwedge_{i=1}^{n}(1-A^-(x_i)+B^-(x_i))\wedge(1-A^+(x_i)+B^+(x_i))\wedge 1,\\ &\bigwedge_{i=1}^{n}(1-A^-(x_i)+B^-(x_i))\vee(1-A^+(x_i)+B^+(x_i))\wedge 1\Big],\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}&I_3(\overline{A},\overline{B})\wedge I_3(\overline{B},\overline{A})\\ =\ &\Big[\bigwedge_{i=1}^{n}(1-A^-(x_i)+B^-(x_i))\wedge(1-A^+(x_i)+B^+(x_i))\wedge(1-B^-(x_i)+A^-(x_i))\\ &\wedge(1-B^+(x_i)+A^+(x_i)),\ \bigwedge_{i=1}^{n}((1-A^-(x_i)+B^-(x_i))\vee(1-A^+(x_i)+B^+(x_i)))\\ &\wedge((1-B^-(x_i)+A^-(x_i))\vee(1-B^+(x_i)+A^+(x_i)))\wedge 1\Big]\\ =\ &\Big[\bigwedge_{i=1}^{n}(1-|A^-(x_i)-B^-(x_i)|)\wedge(1-|A^+(x_i)-B^+(x_i)|),\ \bigwedge_{i=1}^{n}((1-A^-(x_i)+B^-(x_i))\\ &\vee(1-A^+(x_i)+B^+(x_i)))\wedge((1-B^-(x_i)+A^-(x_i))\vee(1-B^+(x_i)+A^+(x_i)))\wedge 1\Big],\end{aligned}$$

是区间值值模糊集合 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 的相似度。

定理2　若 I 是区间值模糊集合的包含度，$\overline{A},\overline{B}\in \mathrm{IVFSs}(X)$，则 $S(\overline{A},\overline{B})=I(\overline{A}\cup\overline{B},\overline{A}\cap\overline{B})$ 是区间值模糊集合 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 的相似度。

证明　(S1)　$S(X,\emptyset)=I(X\cup\emptyset,X\cap\emptyset)=I(X,\emptyset)=\overline{0}$；

(S2)　$S(\overline{A},\overline{B})=I(\overline{A}\cup\overline{B},\overline{A}\cap\overline{B})=\overline{1}\Longleftrightarrow \overline{A}\cup\overline{B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$，对任意的 $x\in X$，$\Longleftrightarrow$ $x\in X$，$A^-(x)\vee B^-(x)\leq A^-(x)\wedge B^-(x)$，$A^+(x)\vee B^+(x)\leq A^+(x)\wedge B^+(x)\Longleftrightarrow$，对任意的 $x\in X$，$A^-(x)=B^-(x)$，$A^+(x)=B^+(x)\Longleftrightarrow \overline{A}=\overline{B}$；

(S3)　$S(\overline{A},\overline{B})=I(\overline{A}\cup\overline{B},\overline{A}\cap\overline{B})=I(\overline{B}\cup\overline{A},\overline{B}\cap\overline{A})=S(\overline{B},\overline{A})$；

(S4)　对任意的 $\overline{A}\subseteq\overline{B}\subseteq\overline{C}\Longrightarrow I(\overline{C}\cup\overline{A},\overline{C}\cap\overline{A})=I(\overline{C},\overline{A})$，$I(\overline{C}\cup\overline{B},\overline{C}\cap\overline{B})=I(\overline{C},\overline{B})$，$I(\overline{B}\cup\overline{A},\overline{B}\cap\overline{A})=I(\overline{B},\overline{A})$，并且 $I(\overline{C},\overline{A})\leq I(\overline{C},\overline{B})$；$I(\overline{C},\overline{A})\leq I(\overline{B},\overline{A})$，因此，我们有 $S(\overline{C},\overline{A})\leq S(\overline{C},\overline{B})$；$S(\overline{C},\overline{A})\leq S(\overline{B},\overline{A})$。

例2　设论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$\overline{A},\overline{B}\in \mathrm{IVFSs}(X)$，令

$$\begin{aligned}I_2(\overline{A},\overline{B})=\Big[&\min\Big(\frac{\sum_{i=1}^{n}A^-(x_i)\wedge B^-(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}A^-(x_i)},\frac{\sum_{i=1}^{n}A^+(x_i)\wedge B^+(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}A^+(x_i)}\Big),\\ &\max\Big(\frac{\sum_{i=1}^{n}A^-(x_i)\wedge B^-(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}A^-(x_i)},\frac{\sum_{i=1}^{n}A^+(x_i)\wedge B^+(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}A^+(x_i)}\Big)\Big],\end{aligned}$$

则

$$
\begin{aligned}
S(\overline{A},\overline{B}) &= I_2(\overline{A}\cup\overline{B},\overline{A}\cap\overline{B})\\
&= \Big[\min\Big(\frac{\sum_{i=1}^{n}(A^-(x_i)\vee B^-(x_i))\wedge(A^-(x_i)\wedge B^-(x_i))}{\sum_{i=1}^{n}A^-(x_i)\vee B^-(x_i)},\\
&\qquad\frac{\sum_{i=1}^{n}(A^+(x_i)\vee B^+(x_i))\wedge(A^+(x_i)\wedge B^+(x_i))}{\sum_{i=1}^{n}A^+(x_i)\vee B^+(x_i)}\Big),\\
&\quad\max\Big(\frac{\sum_{i=1}^{n}(A^-(x_i)\vee B^-(x_i))\wedge(A^-(x_i)\wedge B^-(x_i))}{\sum_{i=1}^{n}A^-(x_i)\vee B^-(x_i)},\\
&\qquad\frac{\sum_{i=1}^{n}(A^+(x_i)\vee B^+(x_i))\wedge(A^+(x_i)\wedge B^+(x_i))}{\sum_{i=1}^{n}A^+(x_i)\vee B^+(x_i)}\Big)\Big]\\
&= \Big[\min\Big(\frac{\sum_{i=1}^{n}A^-(x_i)\wedge B^-(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}A^-(x_i)\vee B^-(x_i)},\frac{\sum_{i=1}^{n}A^+(x_i)\wedge B^+(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}A^+(x_i)\vee B^+(x_i)}\Big),\\
&\quad\max\Big(\frac{\sum_{i=1}^{n}A^-(x_i)\wedge B^-(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}A^-(x_i)\vee B^-(x_i)},\frac{\sum_{i=1}^{n}A^+(x_i)\wedge B^+(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}A^+(x_i)\vee B^+(x_i)}\Big)\Big]\\
&= S_3(\overline{A},\overline{B}),
\end{aligned}
$$

是区间值模糊集合 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 的相似度。

定理3 若 S 是区间值模糊集合的相似度，$\overline{A}$, $\overline{B}\in \mathrm{IVFSs}(X)$，则 $I(\overline{A},\overline{B})=S(\overline{A},\overline{A}\cap\overline{B})$ 是区间值模糊集合 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 的包含度。

证明 (I1) $I(X,\emptyset)=S(X,X\cap\emptyset)=S(X,\emptyset)=\overline{0}$;

(I2) $I(\overline{A},\overline{B})=1\Longleftrightarrow S(\overline{A},\overline{A}\cap\overline{B})=\overline{1}\Longleftrightarrow\overline{A}=\overline{A}\cap\overline{B}\Longleftrightarrow\overline{A}\subseteq\overline{B}$;

(I3) 对任意的 $\overline{A}\subseteq\overline{B}\subseteq\overline{C}\Longrightarrow\overline{A}\cap\overline{C}=\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A}$, $\overline{B}\cap\overline{C}=\overline{B}$，所以

$$S(\overline{B},\overline{A}\cap\overline{B})=S(\overline{B},\overline{A}),\quad S(\overline{C},\overline{A}\cap\overline{C})=S(\overline{C},\overline{A}),\quad S(\overline{C},\overline{B}\cap\overline{C})=S(\overline{C},\overline{B}),$$

由区间值模糊集合相似度的性质，可得

$$S(\overline{C},\overline{A}\cap\overline{C})\le S(\overline{C},\overline{B}\cap\overline{C}),\quad S(\overline{C},\overline{A}\cap\overline{C})\le S(\overline{B},\overline{A}\cap\overline{B}),$$

因此，我们有 $I(\overline{C},\overline{A})\le I(\overline{C},\overline{B})$, $I(\overline{C},\overline{A})\le I(\overline{B},\overline{A})$。

例3 设论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, $\overline{A}$, $\overline{B}\in\mathrm{IVFSs}(X)$，令

$$
\begin{aligned}
S_1(\overline{A},\overline{B}) &= \Big[\min\Big(1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|A^-(x_i)-B^-(x_i)|,\ 1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|A^+(x_i)-B^+(x_i)|\Big),\\
&\quad\max\Big(1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|A^-(x_i)-B^-(x_i)|,\ 1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|A^+(x_i)-B^+(x_i)|\Big)\Big],
\end{aligned}
$$

则

$$
\begin{aligned}
&S_1(\overline{A},\overline{B}\cap\overline{A})\\
=&\Big[\min\Big(1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(A^-(x_i)-B^-(x_i)\wedge A^-(x_i)),\ 1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(A^+(x_i)-B^+(x_i)\wedge A^+(x_i))\Big),\\
&\max\Big(1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(A^-(x_i)-B^-(x_i)\wedge A^-(x_i)),\ 1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(A^+(x_i)-B^+(x_i)\wedge A^+(x_i))\Big)\Big]
\end{aligned}
$$

是区间值模糊集合 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 的包含度。

推论 1　若 S 是区间值模糊集合的相似度，$\overline{A},\overline{B}\in\mathrm{IVFSs}(X)$，则 $I(\overline{A},\overline{B})=S(\overline{B},\overline{A}\cup\overline{B})$ 是区间值模糊集合 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 的包含度。

接下来，我们来研究区间值模糊集合的模糊度与包含度之间的相互刻画问题。

定理 4　若 I 是区间值模糊集合的包含度，$\overline{A}\in\mathrm{IVFSs}(X)$，则 $I(\overline{A}\cup\overline{A}^c,\overline{A}\cap\overline{A}^c)$ 是区间值模糊集合 $\overline{A}$ 的模糊度。

证明　(E1)　若 $\overline{A}$ 是分明集，则 $\overline{A}\cap\overline{A}^c=\emptyset$，$\overline{A}\cup\overline{A}^c=X$，由区间值模糊集合的包含度的性质，可得 $I(\overline{A}\cup\overline{A}^c,\overline{A}\cap\overline{A}^c)=I(X,\emptyset)=\overline{0}$；

(E2)　$I(\overline{A}\cup\overline{A}^c,\overline{A}\cap\overline{A}^c)=\overline{1}\Longleftrightarrow\overline{A}\cup\overline{A}^c\subseteq\overline{A}\cap\overline{A}^c\Longleftrightarrow\overline{A}\cup\overline{A}^c=\overline{A}\cap\overline{A}^c\Longleftrightarrow$ 对任意的 $x\in X$，$A^-(x)\vee(1-A^+(x))=A^-(x)\wedge(1-A^+(x))\Longleftrightarrow$ 对任意的 $x\in X$，$A^-(x)=1-A^+(x)$，即对任意的 $x\in X$，我们有 $A^-(x)+A^+(x)=1$；

(E3)　若 $A^-(x)\le B^-(x)$，$A^+(x)\le B^+(x)$，且 $B^-(x)+B^+(x)\le 1$，则我们有

$$
\begin{cases}
A^-(x)\le B^-(x)\le (B^+(x))^c\le (A^+(x))^c\\
A^+(x)\le B^+(x)\le (B^-(x))^c\le (A^-(x))^c
\end{cases}
$$

$$
\Longrightarrow\begin{cases}
A^-(x)\vee(A^+(x)^c)\ge B^-(x)\vee(B^+(x)^c)\\
A^+(x)\vee(A^-(x)^c)\ge B^+(x)\vee(B^-(x)^c)
\end{cases}
$$

$$
\Longrightarrow\overline{A}\cup\overline{A}^c\supseteq\overline{B}\cup\overline{B}^c\supseteq\overline{B}\cap\overline{B}^c\supseteq\overline{A}\cap\overline{A}^c\Longrightarrow I(\overline{A}\cup\overline{A}^c,\overline{A}\cap\overline{A}^c)\subseteq I(\overline{B}\cup\overline{B}^c,\overline{B}\cap\overline{B}^c).
$$

同理，对于 $A^-(x)\ge B^-(x)$，$A^+(x)\ge B^+(x)$，且 $B^-(x)+B^+(x)\ge 1$ 的情形，我们有 $I(\overline{A}\cup\overline{A}^c,\overline{A}\cap\overline{A}^c)\subseteq I(\overline{B}\cup\overline{B}^c,\overline{B}\cap\overline{B}^c)$ 成立。

(E4)　$I(\overline{A}\cup\overline{A}^c,\overline{A}\cap\overline{A}^c)=I(\overline{A}^c\cup\overline{A},\overline{A}^c\cap\overline{A})=I(\overline{A}^c\cup(\overline{A}^c)^c,\overline{A}^c\cap(\overline{A}^c)^c)$。

例 4　设论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$\overline{A}\in\mathrm{IVFSs}(X)$，令

$$
\begin{aligned}
I_2(\overline{A},\overline{B})=&\Big[\min\Big(\frac{\sum_{i=1}^n A^-(x_i)\wedge B^-(x_i)}{\sum_{i=1}^n A^-(x_i)},\frac{\sum_{i=1}^n A^+(x_i)\wedge B^+(x_i)}{\sum_{i=1}^n A^+(x_i)}\Big),\\
&\max\Big(\frac{\sum_{i=1}^n A^-(x_i)\wedge B^-(x_i)}{\sum_{i=1}^n A^-(x_i)},\frac{\sum_{i=1}^n A^+(x_i)\wedge B^+(x_i)}{\sum_{i=1}^n A^+(x_i)}\Big)\Big],
\end{aligned}
$$

则

$$
\begin{aligned}
I_2(\overline{A}\cup\overline{A}^c,\overline{A}\cap\overline{A}^c)=&\Big[\frac{\sum_{i=1}^n A^-(x_i)\wedge(1-A^+(x_i))}{\sum_{i=1}^n A^-(x_i)\vee(1-A^+(x_i))},\frac{\sum_{i=1}^n A^+(x_i)\wedge(1-A^-(x_i))}{\sum_{i=1}^n A^+(x_i)\vee(1-A^-(x_i))}\Big]\\
=&E_2(\overline{A})
\end{aligned}
$$

是区间值模糊集合的模糊度。

对于区间值模糊集合 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 来说，我们令 $h(\overline{A},\overline{B})\in \mathrm{IVFSs}(X)$，对于 $x\in X$，$p>0$

$$h^-(\overline{A},\overline{B})(x)=\frac{1+\min\left(|A^-(x)-A^-(x)\wedge B^-(x)|^p,\ |A^+(x)-A^+(x)\wedge B^+(x)|^p\right)}{2},$$

$$h^+(\overline{A},\overline{B})(x)=\frac{1+\max\left(|A^-(x)-A^-(x)\wedge B^-(x)|^p,\ |A^+(x)-A^+(x)\wedge B^+(x)|^p\right)}{2},$$

因此，我们有下面的定理。

定理5 若 E 是区间值模糊集合的模糊度，则 $E(h(\overline{A},\overline{B}))$ 是区间值模糊集合 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 的包含度。

证明 (I1) 对任意的 $x\in X\Longrightarrow X(x)=1,\ \emptyset(x)=0\Longrightarrow h^-(X,\emptyset)=h^+(X,\emptyset)=1$，因此 $h(X,\emptyset)=X$ 是分明集，故 $E(h(X,\emptyset))=\overline{0}$；

(I2) $E(h(\overline{A},\overline{B}))=\overline{1}\Longleftrightarrow h^-(\overline{A},\overline{B})+h^+(\overline{A},\overline{B})=1\Longleftrightarrow |A^-(x)-A^-(x)\wedge B^-(x)|=|A^+(x)-A^+(x)\wedge B^+(x)|=0\Longleftrightarrow A^-(x)=A^-(x)\wedge B^-(x),\ A^+(x)=A^+(x)\wedge B^+(x)\Longleftrightarrow A^-(x)\le B^-(x),\ A^+(x)\le B^+(x)\Longleftrightarrow \overline{A}\subseteq\overline{B}$；

(I3) 对任意的 $\overline{A}\subseteq\overline{B}\subseteq\overline{C}\Longrightarrow A^-(x)\le B^-(x)\le C^-(x)$，且

$$\begin{aligned}&A^+(x)\le B^+(x)\le C^+(x)\\ &\Longrightarrow h^-(\overline{C},\overline{A})=\frac{1+\min(|C^-(x)-C^-(x)\wedge A^-(x)|^p,\ |C^+(x)-C^+(x)\wedge A^+(x)|^p)}{2}\\ &\qquad\qquad\ge\frac{1+\min(|C^-(x)-C^-(x)\wedge B^-(x)|^p,\ |C^+(x)-C^+(x)\wedge B^+(x)|^p)}{2}\\ &\qquad\qquad=h^-(\overline{C},\overline{B}),\end{aligned}$$

并且，$h^+(\overline{C},\overline{A})\ge h^+(\overline{C},\overline{B})$。考虑到 $h^-(\overline{C},\overline{B})+h^+(\overline{C},\overline{B})\ge 1$，因此，我们有 $E(h(\overline{C},\overline{A}))\le E(h(\overline{C},\overline{B}))$。

同理也可证，$E(h(\overline{C},\overline{A}))\le E(h(\overline{B},\overline{A}))$。

推论2 若 E 是区间值模糊集合的模糊度，$h(\overline{A},\overline{B})$ 如前所定义，则 $E((h(\overline{A},\overline{B}))^c)$ 是区间值模糊集合 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 的包含度。

例5 设论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$\overline{A},\overline{B}\in \mathrm{IVFSs}(X)$，令

$$E_2(\overline{A})=\left[\frac{\sum_{i=1}^n A^-(x_i)\wedge(1-A^+(x_i))}{\sum_{i=1}^n A^-(x_i)\vee(1-A^+(x_i))},\ \frac{\sum_{i=1}^n A^+(x_i)\wedge(1-A^-(x_i))}{\sum_{i=1}^n A^+(x_i)\vee(1-A^-(x_i))}\right],$$

则

$$\begin{aligned}E_2(h(\overline{A},\overline{B}))=&\left[\frac{\sum_{i=1}^n(1-\max(|A^-(x_i)-B^-(x_i)\wedge A^-(x_i)|,\ |A^+(x_i)-B^+(x_i)\wedge A^+(x_i)|))}{\sum_{i=1}^n(1+\min(|A^-(x_i)-B^-(x_i)\wedge A^-(x_i)|,\ |A^+(x_i)-B^+(x_i)\wedge A^+(x_i)|))},\right.\\ &\left.\frac{\sum_{i=1}^n(1-\min(|A^-(x_i)-B^-(x_i)\wedge A^-(x_i)|,\ |A^+(x_i)-B^+(x_i)\wedge A^+(x_i)|))}{\sum_{i=1}^n(1+\max(|A^-(x_i)-B^-(x_i)\wedge A^-(x_i)|,\ |A^+(x_i)-B^+(x_i)\wedge A^+(x_i)|))}\right]\end{aligned}$$

是区间值模糊集合 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 的包含度。

5　结束语

相似度、模糊度和包含度是模糊数学理论和应用研究的三个重要的信息测度。本文从区间数度量的角度出发，给出了区间值模糊集合包含度的一种新的定义方法，并基于公理化定义，详细研究了基于区间数度量的区间值模糊集合的相似度、模糊度和包含度之间的相互转化关系，给出了若干公式来计算区间值模糊集合的相似度、模糊度和包含度。可以预计，基于区间数度量的区间值模糊集合的相似度、模糊度和包含度在刻画信息方面将更加合理，具有很强的直观解释和逻辑性。同时，基于区间数度量的区间值模糊集合的相似度、模糊度和包含度也将在模式识别、近似推理、模糊神经网络和模糊控制等领域中得到进一步的应用，并从而丰富区间值模糊集合理论和应用的研究内容。

参考文献：

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8: 338-353

[2] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20: 87-96

[3] Grattan-Guinness I. Fuzzy membership mapped onto interval and many-valued quantities[J]. Z Math Logic Grundlang Mathe, 1976, 22: 149-160

[4] Jahn K U. Interval-wertige mengen[J]. Math Nach, 1975, 68: 115-132

[5] Sambuc R. Function flous, application a l'aide au diagnostic en pathologie thyroidienne[D]. Thesis de Doctorat en Medicine, University of Marseille, 1975

[6] Zadeh L A. Outline of a new approach to analysis of complex systems and decision processes[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1973, 3: 28-44

[7] Gorzalczany B. Approximate inference with interval-valued fuzzy sets—an outline[C]// Proc Polish Symp on Interval and Fuzzy Mathematics, Poznan, 1983: 89-95

[8] Turksen B. Interval valued fuzzy sets based on normal forms[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20: 191-210

[9] Zeng W Y, Shi Y. Note on interval-valued fuzzy set[J]. Lecture Notes in Artificial Intelligence, 2005, 3316: 20-25

[10] Zeng W Y, Shi Y, Li H X. Representation theorem of interval-valued fuzzy set[J]. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2006, 14: 259-269

[11] 汪培庄. 模糊集合及其应用[M]. 上海：上海科技出版社，1983
Wang P Z. Fuzzy Sets and its Application[M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1983

[12] Wang X Z, B De Bates, Kerre E. A comparative study of similarity measures[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1995, 73: 259-268

[13] Cross V V, Sudkamp T A. Similarity and Compatibility in Fuzzy Sets Theory[M]. New York: Physica-Verlag, 2002

[14] 陈图云，孟艳平. 模糊集相似度限定推理方法[J]. 工程数学学报，2005, 22(2): 346-348
Chen T Y, Meng Y P. The reasoning method by fuzzy set similarity degree[J]. Journal of Engineering Mathematics, 2005, 22(2): 346-348

[15] A De Luca, Termini S. A definition of non-probabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory[J]. Inform and Control, 1972, 20: 301-312

[16] Yager R R. On the measure of fuzziness and negation. Part I: membership in the unit interval[J]. Internat J General Systems, 1979, 5: 189-200

[17] Sinha D, Dougherty E R. Fuzzification of set inclusion: theory and applications[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1993, 55: 15-42

[18] Zeng W Y, Li H X. Inclusion measures, similarity measures and the fuzziness of fuzzy sets and their relations[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2006, 21: 639-653

[19] Zeng W Y, Li H X. Relationship between similarity measure and entropy of interval-valued fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157: 1477-1484

[20] Zeng W Y, Guo P. Normalized distance, similarity measure, inclusion measure and entropy of interval-valued fuzzy sets and their relations[J]. Information Sciences, 2008, 178: 1334-1342

[21] Bustince H. Indicator of inclusion grade for interval-valued fuzzy sets: application to approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2000, 23: 137-209

[22] 王贵君，李晓萍. 基于IVFS的IV-模糊度与IV-贴近度及积分表示[J]. 工程数学学报，2004, 21(2): 195-201
Wang G J, Li X P. On the IV-fuzzy degree and the IV-similarity degree of IVFS and their integral representation[J]. Journal of Engineering Mathematics, 2004, 21(2): 195-201

[23] 赵宜宾，曾文艺. 基于区间数度量的区间值模糊集合的相似度和模糊度的关系研究[J]. 模糊系统与数学，投稿
Zhao Y B, Zeng W Y. The relationship between the similarity measure and the entropy of interval-valued fuzzy sets based on interval-number measurement[J]. Fuzzy System and Mathematics, in appear

Relationship Among Similarity Measure, Entropy and Inclusion Measure of Interval-valued Fuzzy Sets Based on Interval-number Measurement

ZHAO Yi-bin[1,2], ZENG Wen-yi[1,†]

(1- College of Information Science and Technology, Beijing Normal University, Beijing 100875;
2- Department of Basic Course, Institute of Disaster Prevention Science and Technology,
Yanjiao East of Beijing 065201)

Abstract: The research about the similarity measure, the entropy and the inclusion measure of interval-valued fuzzy sets is a hot topic. Considering that the interval-valued fuzzy set includes more information than the ordinary fuzzy set, in this paper, we introduce an axiomatic definition of the inclusion measure of the interval-valued fuzzy sets based on the interval-number measurement, investigate the relationship among the similarity measure, the entropy and the inclusion measure of the interval-valued fuzzy sets in detail, prove five theorems showing that the similarity measure, the entropy and the inclusion measure of the interval-valued fuzzy sets can be transformed by each other based on their axiomatic definitions, and finally propose some formulas to calculate the similarity measure, the entropy and the inclusion measure of the interval-valued fuzzy sets. These conclusions can be applied in many fields such as approximate reasoning, decision-making analysis, pattern recognition and so on.

Keywords: interval-valued fuzzy set; similarity measure; entropy; inclusion measure; interval-number

Received: 10 June 2008. **Accepted:** 01 Apr 2009.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10971234; 60775032).

† **Corresponding author:** W. Zeng. E-mail address: zengwy@bnu.edu.cn